

PROBLEMAS INVERSOS EM CONVECÇÃO NATURAL APLICADOS A UMA PLACA PLANA VERTICAL AQUECIDA

Cristiene Vasconcelos Gonçalves
Marcos Antônio de Moraes Brito
Aristeu da Silveira Neto
Gilmar Guimarães

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Bloco 1M,
Campus Santa Mônica CEP 38-400 089 Uberlândia M. G. –

***Resumo.** Neste trabalho um problema inverso em convecção de calor é considerado para uma placa plana vertical com aquecimento constante. O escoamento é bidimensional permanente e descrito pelas equações de camada limite. A solução da equação da energia é obtida através do método von Kármán-Pohlhausen. Um algoritmo de função especificada sequencial é aplicado ao sistema de equações que governam o escoamento e a transferência de calor na placa. Os resultados dos experimentos confirmam a aplicabilidade da metodologia inversa para a obtenção da temperatura e fluxo da parede da placa em meios convectivos.*

***Palavra-chave:** Convecção de calor, Problemas inversos, Função sequencial especificada, Método integral.*

1. INTRODUÇÃO

A análise de um problema de convecção natural, envolve a solução das equações de movimento, continuidade e energia a partir do estabelecimento das condições de contorno. Esse procedimento é conhecido como a solução de um problema direto. Entretanto em muitas situações práticas, condições de contorno são desconhecidas ou inacessíveis fazendo-se necessária a utilização de uma metodologia inversa.

Técnicas de problemas inversos aplicados à condução de calor tem recebido muita atenção há três décadas. Beck and Blackwell (1985) apresentam uma excelente revisão da literatura, e resumem as várias aproximações e contribuições significativas no estudo de condução inversa de calor. A técnica de problemas inversos em condução encontra-se atualmente em estágio avançado de desenvolvimento (Murio, 1996), (Raudenský, 1993), (Ozisik, 1992), (Beck and Blackwell, 1985), (Alifanov, 1985), (Alencar Jr., 1997), (Lima, 1998), (Bokar, 1995). Entretanto o número de trabalhos voltados à convecção de calor é bem menor. Um dos primeiros trabalhos em problemas inversos em convecção é apresentado por Keller e Cebeci (Cebeci et al, 1975), onde se determina a variação da velocidade para um coeficiente de atrito local prescrito ou a espessura de deslocamento em um escoamento de camada limite. Recentemente problemas inversos em convecção vêm recebendo atenção

devido às várias aplicações práticas de engenharia no uso de aquecimento ou resfriamento convectivo. Pode-se citar trabalhos baseados na técnica de gradientes conjugados, (Prud'homme, 1995), (Ozisik, 1996), (Machado e Orlande, 1997) e baseados na técnica de função especificada (Moutsoglou, 1989), (Prud'homme, 1995), (Beck, 1986).

Uma das dificuldades na solução de problemas inversos se deve à grande sensibilidade das soluções aos erros de medição. Isso significa que uma pequena imprecisão nos dados medidos pode resultar em grandes imprecisões dos resultados. A principal dificuldade de problemas inversos em convecção de calor vem do acoplamento entre as equações de escoamento e temperatura, e a característica não linear dos coeficientes de sensibilidade. Neste trabalho um escoamento dirigido pelos gradientes de temperatura é considerado, obtendo-se a solução inversa via técnica da função especificada, (Beck and Blackwell, 1985).

O problema estudado consiste na estimativa do fluxo de calor submetido em uma placa plana vertical, através de medições de temperatura no interior do fluido.

Faz-se abordagem desse problema através das hipóteses de fluido incompressível, e regime laminar sob estado permanente. As equações de movimento são descritas pelas equações de camada limite à densidade constante, exceto no termo da força de corpo, onde se aplica a aproximação de Boussinesq. A solução é obtida através do método de von Kármán-Pohlhausen para uma placa plana aquecida, (Holman, 1990).

2. METODOLOGIA

2.1. Problema direto de transferência de calor

Antes da obtenção da solução do algoritmo do problema inverso, apresenta-se a metodologia do problema de transferência de calor direto estudado, que consiste de uma superfície vertical aquecida com fluxo uniforme, como mostra a Figura 1.

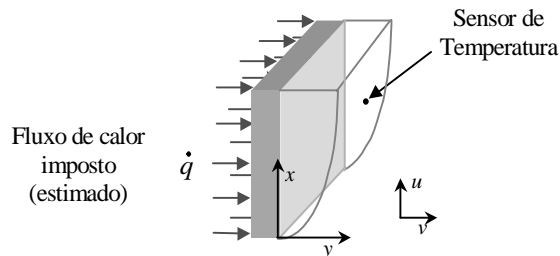


Figura 1- Placa vertical plana aquecida

As equações da camada limite que expressam a conservação do momento e da energia em regime permanente para um fluido incompressível, são escritas respectivamente, como:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

onde x é a coordenada da distância medida ao longo da placa, y é a coordenada da distância normal à placa, u e v são as componentes da velocidade na direção x e y respectivamente, T a

temperatura, α a difusividade térmica do ar, g a aceleração da gravidade e β a o coeficiente de expansão térmica do ar.

A partir de um procedimento análogo ao descrito por Holman (1990) para uma placa plana isotérmica, aplicou-se o método de von Kármán Pohlhausen obtendo-se a solução das equações da camada limite laminar para convecção natural em uma placa vertical tendo um fluxo uniforme na superfície. Nesse caso, um perfil para a componente da velocidade em x , e para a temperatura é proposto por:

$$u = a + b \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot y^3 \quad (4)$$

e

$$T = e + f \cdot y + g \cdot y^2 \quad (5)$$

As constantes a, b, c, d, e, f e g , são obtidas de forma a satisfazerem as condições de contornos presentes no problema, ou seja:

$$u = 0, \quad \text{para} \quad y = 0; \quad (6)$$

$$u = 0, \quad \text{para} \quad y = \delta; \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{para} \quad y = \delta; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g\beta \frac{T_w - T_\infty}{\nu}, \quad \text{para} \quad y = 0; \quad (9)$$

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \text{para} \quad y = 0; \quad (10)$$

$$T = T_\infty, \quad \text{para} \quad y = \delta; \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \text{para} \quad y = \delta; \quad (12)$$

onde δ , para número de Prandtl igual a 0,07, é a espessura da camada limite, k é a condutividade térmica, q'' fluxo de calor uniforme imposto na placa plana por unidade de área.

A relação final para o perfil da componente da velocidade no eixo x , u , é dada por:

$$\frac{u}{u_x} = \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2, \quad (13)$$

sendo que u_x é uma velocidade de referência função de x .

Utilizando as condições de contorno dadas pelas Eqs. (6-12) obtém-se a expressão para o perfil de temperatura na placa, como:

$$T - T_\infty = \frac{q''}{2 \cdot k \cdot \delta} (y - \delta)^2, \quad (15)$$

onde a expressão para a espessura da camada limite, δ , encontrada:

$$\delta = \left[\frac{9 \cdot k \cdot \alpha}{g \cdot \beta \cdot q} \left(\frac{240}{7} \alpha + 48 \cdot v \right) \cdot x \right]^{1/2} \quad (16)$$

2. 2. Problema inverso de transferência de calor

Como citado anteriormente existem várias técnicas para a solução de problemas inversos. Nesse trabalho a técnica da função especificada proposta por Beck(1970) aplicada à condução de calor é adaptada para o presente problema de convecção. O método é descrito detalhadamente em Beck et al.(1995) sendo alguns passos do algoritmo discutidos aqui.

Um valor inicial para o fluxo da placa plana, q_M^* , é adotado para localização axial x_M , onde $M=1,\dots,9$. Este mesmo valor é temporariamente assumido constante, ou seja, para localizações axiais ao escoamento, x_{M+1} , x_{M+2} , ..., x_{M+r-1} , onde r é número de passos futuros:

$$q_M = q_{M+1} = q_{M+2} = q_{M+r-1} = q_M^* \quad (17)$$

O problema direto é então resolvido, obtendo-se o valor da temperatura $T(x,y)_{M+r-1}$, através da Eq. (15).

Define-se os coeficientes de sensibilidades, $X(x,y)_{M+r-1}$, como a primeira derivada da temperatura com relação ao fluxo de calor, ou seja,

$$X(x,y)_{M+i-1} = \frac{\partial T(x,y)_{M+i-1}}{\partial q_M} \quad (18)$$

Observa-se que o mapeamento do coeficiente de sensibilidade mostra as regiões onde é melhor a localização para o sensor de medição. Quando $X(x,y)_{M+r-1}$ é relativamente grande, significa alta sensibilidade de mudança de temperaturas no interior à mudanças de fluxos. Por outro lado, quando os valores de $X(x,y)_{M+r-1}$ são pequenos, as chances de bons resultados na estimativa são menores (Beck and Blackwell, 1985).

Define-se um somatório que representa o erro quadrático devido à diferença entre as temperatura medidas, Y_{M+r-1} , e as calculadas pelo modelo teórico, Eq. (15), $T(x,y)_{M+r-1}$, como:

$$S = \sum_{i=1}^r (Y(x,y)_{M+i-1} - T(x,y)_{M+i-1})^2 \quad (19)$$

A Eq. (19) é então minimizada em relação à componente de fluxo q_M . Assim, derivando S em relação à componente q_M tem-se:

$$\frac{\partial S}{\partial q_M} = 0 = \sum_{i=1}^r (Y(x,y)_{M+i-1} - T(x,y)_{M+i-1}) \cdot X(x,y)_{M+i-1} \quad (20)$$

Uma vez que a temperatura é uma função contínua do fluxo de calor, pode-se expandir o campo de temperatura em torno de um valor q^* , arbitrário, através das séries de Taylor:

$$T(x,y)_{M+i-1} = T_{M+i-1}^*(x,y) + X_{M+i-1} \Delta q_M \quad \text{para} \quad i=1,\dots,r \quad (21)$$

Combinando-se as Eqs. (20) e (21), obtém-se Δq_M através da expressão,

$$\Delta q_M = \frac{\sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - T_{M+i-1}^*) \cdot X_{M+i-1}}{\sum_{i=1}^r X_{M+i-1}^2} \quad (22)$$

onde T_{M+i-1}^* são os valores de temperaturas calculadas baseadas numa estimativa inicial de q_M^* . Uma melhor estimativa para o fluxo de calor na posição x_m nesse caso pode ser dada por:

$$q_M = q_M^* + \Delta q_M \quad (23)$$

O algoritmo computacional pode ser resumido em:

- Passo 1: Adota-se um valor qualquer para o fluxo de calor superficial uniforme para a placa plana, q^* , normalmente o valor zero.
- Passo 2: Resolve-se o problema direto através das Eqs.(15) e (16).
- Passo 3: Calcula-se o valor da temperatura pelo problema direto, $T^*(q^*, x, y, \delta(x_1, q^*))$.
- Passo 4: Calcula-se o coeficiente de sensibilidade $X(q^*)$, Eq. (18).
- Passo 5: Calcula-se Δq_M , Eq. (22).
- Passo 6: Obtém-se q_M através da Eq. (23).
- Passo 7: Adota-se $q_M^* = q_M$.
- Passo 8: Retorna-se ao passo 2, até que se tenha alcançado o critério de convergência:

$$\frac{(q_{M+1} - q_M)}{q_{M+1}} \leq 0,0001.$$

3. BANCADA EXPERIMENTAL

O aparato experimental consiste de um duto retangular apoiado sobre uma bancada, como mostrado na Fig. 2. Uma placa plana com uma resistência de aquecimento, de dimensões 0,10 x 0,11 m, é instalada no duto e presa por prendedores laterais. A temperatura do centro da placa aquecida, T_w , é monitorada por um sensor conectado a um console elétrico que incorpora um auto-transformador variável com um leitor digital que controla e indica a potência suprida à placa.

A placa aquecida é vista através de uma janela acrílica na parede do duto. Uma sonda de temperatura contendo um termopar cobre-constantan do tipo T, mede temperatura no interior do filme da camada limite a uma posição x, y da placa. Um paquímetro é fixado no aparato de forma a identificar a posição y da sonda enquanto que a posição x é determinada através de uma escala na própria placa. Um termopar cromel-alumel do tipo K localizado na parte lateral do duto fornece a temperatura do meio ambiente, T_∞ .

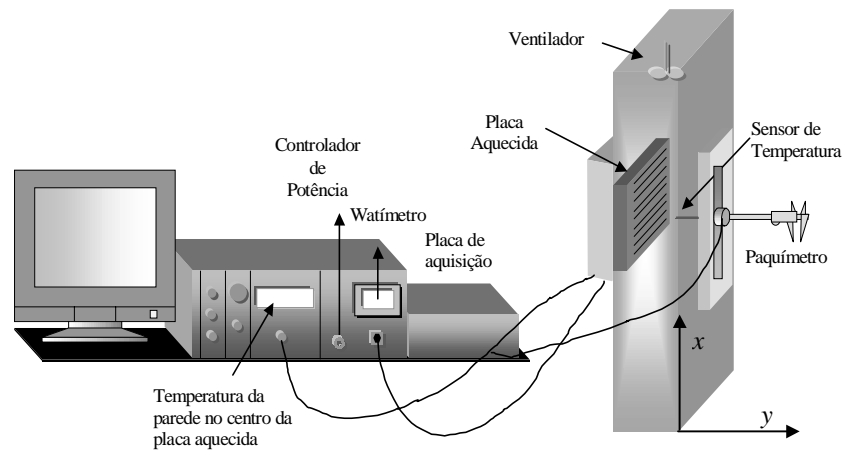


Figura 2: Aparato experimental

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram realizados 10 experimentos com aproximadamente a mesma quantidade de calor imposta. Para cada experimento obteve-se as temperaturas ambiente, da placa e os perfis $T(x,y)$ em função de valores pré-fixados de x e y . A Tabela 1 apresenta um resumo das condições experimentais e parâmetros assumidos para um teste típico.

Tabela 1: Dados referentes aos testes realizados.

x (m)	y (m)	T_{∞} (°C)	T_w (°C)	k (W/m.°C)	ν (m ² /s)	g (m ² /s)	β (°C ⁻¹)
0,01 a 0,09	0,002	26,1	76,0	0,02624	15,69e-6	9,8	0,0031

Para a obtenção do regime permanente o fluxo de calor foi imposto por 10 horas, sendo $Y(x,y)$, T_{∞} , e T_w , coletados em intervalos de 3 minutos. Verificou-se que o regime permanente foi alcançado em aproximadamente 4 horas dependendo das temperaturas ambientes. Estabeleceu-se então um tempo mínimo de 6 horas entre o início do aquecimento e o início da coleta de dados.

A fluxo de calor, q , estimado através do método inverso é apresentado na Fig. 9 para passos futuros, r , variando de 1 a 5. Nota-se que $r=5$ apresenta o menor desvio em relação ao valor médio estimado. Uma vez que um maior número de passos futuros acarretaria em um menor número de temperaturas experimentais adotou-se o passo $r=5$ como o passo futuro ideal para as condições desses experimentos. Observa-se na Fig. 9 uma variação significativa entre os valores de fluxo de calor para os diversos passos futuros. Entretanto à medida que os passos futuros aumentam a dispersão em torno do fluxo de calor médio diminui, obtendo-se para $r=5$ uma dispersão de 13% em torno do valor médio de 288,68.

Observa-se, entretanto, que qualquer que seja o valor de r , o fluxo de calor apresenta uma tendência linear com pequena inclinação. Infelizmente, no atual estágio do trabalho esse problema ainda não foi totalmente investigado. Ou seja, o fluxo de calor imposto, devido às características construtivas da placa aquecedora, pode sofrer uma variação em torno de um fluxo médio. Nesse caso a taxa de troca de calor obtida pelos valores estimados podem estar representando as condições reais do experimento. Outra explicação poderia ser dada pela presença de alguma incerteza de medição no posicionamento de sensor em relação a y introduzindo uma característica sistemática em relação aos valores previstos no modelo. Uma análise das fontes de erro e de sensibilidade da técnica é apresentada na próxima seção.

A Fig. 10 apresenta o desvio entre as temperaturas medidas, $Y(x,y)$, para as posições de x descritas na Tab.1 e o desvio entre as temperaturas estimadas, $T(x,y)$ obtidas através da Eq. 15, usando-se o fluxo de calor q , estimado pelo método inverso para passo futuro 5. Na ausência do conhecimento exato do fluxo de calor imposto propõe-se como uma validação parcial a comparação entre a temperatura experimental no centro da placa e a correspondente temperatura calculada a partir do fluxo de calor obtido para $r=5$. Para essa comparação, inseriu-se um termopar na superfície interna da placa aquecedora, efetuando-se uma calibração desse sensor com um sensor de temperatura na superfície da placa em sua posição central ($x=0,05, y=0$). Uma vez calibrado o sensor interno da placa, o termopar da superfície foi retirado de forma a não afetar os ensaios de convecção de calor. A Fig.11 apresenta essa comparação, ou seja a evolução da temperatura da parede estimada ao longo de x e a temperatura medida no centro da placa, $x=0,05$. Observou-se um desvio de 1,34 % para a temperatura medida pelo sensor interno e a estimada no centro da placa.

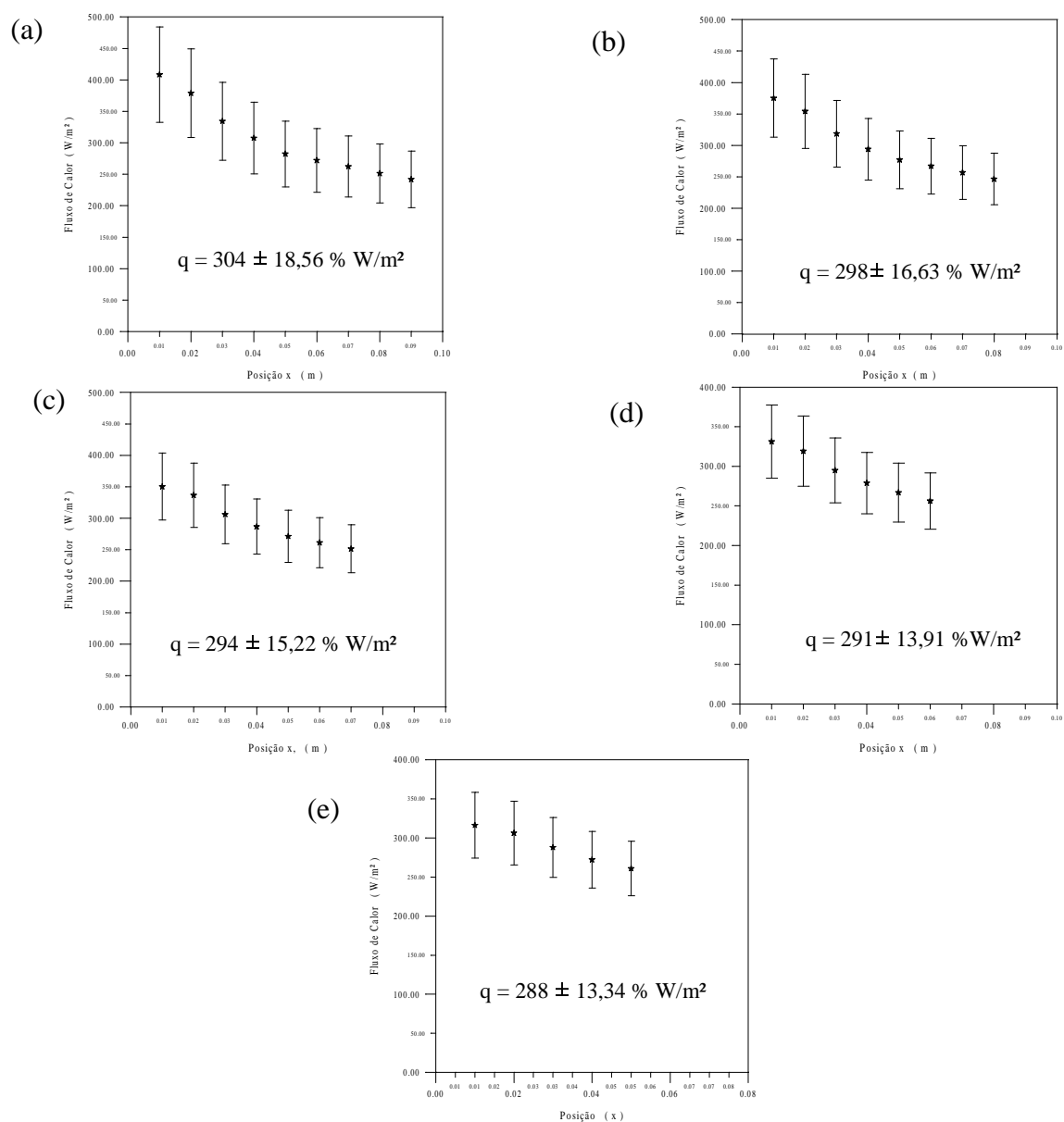


Figura 9: Fluxo de calor estimado para: (a) $r = 1$, (b) $r = 2$, (c) $r = 3$, (d) $r = 4$ e (e) $r = 5$.

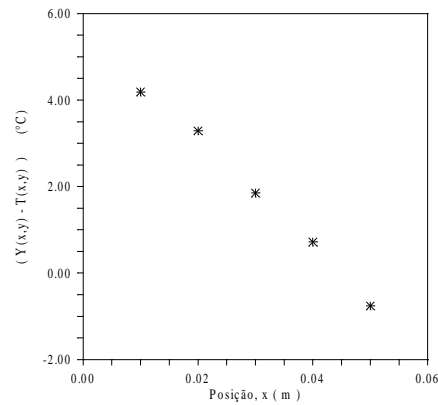


Figura 10: Diferença entre as temperaturas estimadas, $T(x,y)$, e medidas experimentalmente, $Y(x,y)$, para as condições apresentadas na Tab. 1.

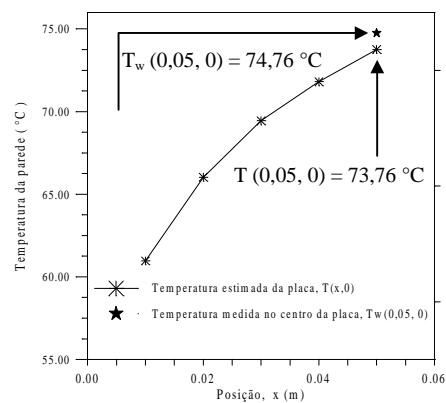


Figura 11: Comparação entre a evolução da temperatura da parede estimada ao longo de x e a temperatura medida no centro da placa, $x=0,05$.

4. ANÁLISE DE INCERTEZA E DOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDADE.

Uma vez que problemas inversos são muito sensíveis a erros experimentais, torna-se necessária uma análise das fontes de erros inerentes ao modelo e ao experimento. Identifica-se como fontes principais de incerteza a determinação precisa das posições x e y e os erros aleatórios contidos na medição de $Y(x,y)$ e de T_∞ .

Na análise de sensibilidade devido à incerteza desses parâmetros utilizou-se as Eq. (15) e Eq. (16) em uma simulação numérica. Para uma investigação da influência da posição y , adotou-se uma incerteza aleatória de $\pm 10\%$ e $\pm 5\%$ de seu valor. Os valores de x_i foram então fixados. Os resultados do erro percentual da simulação podem ser verificados através da Fig. 12. Nota-se a grande sensibilidade dos resultados em relação a localização precisa do sensor na posição y , o que não ocorre aos erros adicionados à posição x e T_∞ . A Fig. 13 apresenta essa simulação. Nesse caso uma incerteza aleatória de $\pm 10\%$ na obtenção das posições de x_i foi admitida, sendo fixado o valor de y . Para a verificação dos parâmetros, temperatura experimental, $Y(x,y)$ e de T_∞ foi admitido um erro de $\pm 0,5\text{ }^\circ\text{C}$. Na prática obteve-se temperaturas experimentais com uma incerteza de medição de $\pm 0,4\text{ }^\circ\text{C}$.

O comportamento dos coeficientes de sensibilidade indicam a região de melhor localização dos sensores. Um mapeamento desses coeficientes é apresentada na Fig. 14, onde as melhores tomadas de temperatura seriam para os maiores valores de X , ou seja em regiões próximas à placa e em sua extremidade superior. Entretanto, distanciando-se da placa, o coeficiente de sensibilidade torna-se a aumentar, mas afasta-se da condição de contorno de

interesse, diminuindo assim sua influência. Ao colocarmos o sensor de temperatura longe da condição de contorno tem-se problemas na convergência do algoritmo, obtendo-se valores sem significado físico. O gradiente do coeficiente de sensibilidade ao longo do eixo x , para uma determinada posição y e decresce à medida que y aumenta, da mesma forma que ocorre com o perfil de temperatura.

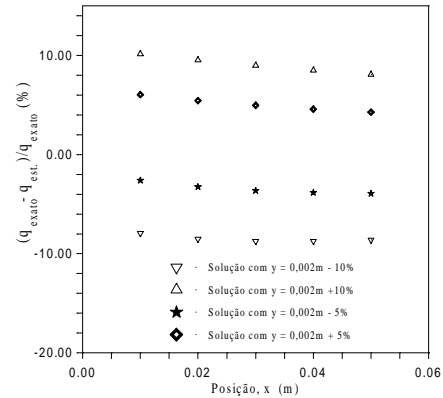


Figura 12: Desvio percentual do fluxo de calor com erros aleatórios em $Y(x,y)$ e em y .

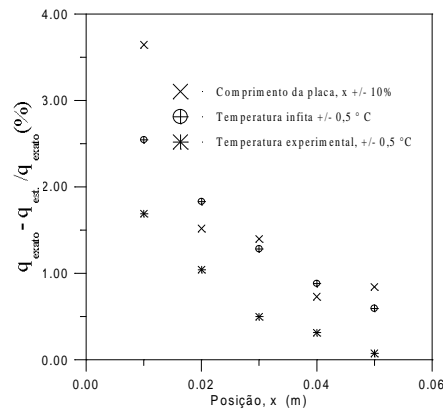


Figura 13: Erro percentual do fluxo de calor considerando-se incertezas em x_i , T_∞ , e $Y(x,y)$.

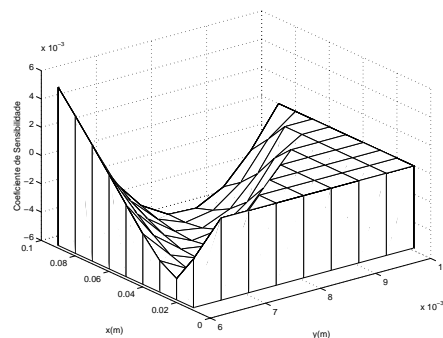


Figura 14: Perfil do Coeficiente de sensibilidade ao longo da placa plana.

4. CONCLUSÃO

A metodologia inversa foi usada para resolver um problema inverso bidimensional em estado estacionário de convecção natural sobre placa plana vertical aquecida com convecção

natural. A principal fonte de incerteza, nesse caso, reside na obtenção da coordenada y , normal à placa plana vertical. A metodologia inversa mostrou-se adequada para a obtenção do fluxo de calor na placa a partir de medições de temperatura no interior da camada limite.

REFERÊNCIAS

- Alencar Jr., J. P., Orlande. H. R. B. & Özisik, M. N., 1997 “A General Two-dimensional Formulation for Inverse Heat Conduction Problems”, XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Bauru, Brasil.
- Alifanov, O. M. & Egorov, Yu. V., 1985, “Algorithms and Results of Solving the Inverse Heat Conduction Boundary Problem in Two- dimensional Formulation”, Journal of Engineering Physics, vol. 48, No. 4.
- Beck, J. V. and Blackwell, J. C., 1985, “Inverse Heat Conduction”, John & Sons, Inc, N.Y.
- Bokar, J. C. and Ozisik, M. N., 1995, “Inverse analysis for estimating the time-varying inlet temperature in laminar flow inside a parallel plate duct”, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 38, No. 1, pp. 39 - 45.
- Cebeci T. et al, 1975, “Turbulent boundary layers with assigned wall shear”, Computers and Fluids, vol.3, pp. 37-49.
- Holman, J. P., 1990, “Heat Transfer”, Seventh Edition, McGraw-Hill, Inc, N.Y.
- Lima, F.R. S. & Guimarães G., “Método do Gradiente Conjugado Aplicado a Problema Inverso de Condução de Calor Bidimensional”, V Congresso de Engenharia Mecânica Norte Nordeste, João Pessoa, Brasil, 1998.
- Machado, H. A. e Orlande, H. R. B., 1997, “Inverse analysis for estimating the timewise and spacewise variation of the wall heat flux in a parallel plate channel”, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, vol. 7, No. 7, pp 696-710.
- Morales, R. E.M., Balparada, A. and Silveira-Neto, A., “Large-eddy simulation of the combined convection around a heated rotating cylinder”, Int. J. Heat Mass Transfer, 1997
- Moutsoglou, A., 1989, “An inverse convection problem”, Trans. ASME J. Heat Transfer, vol. 111, No. 1, pp 37 - 43.
- Murio, D. A., Zheng, H., 1995, “A Stable Algorithm for 3D-IHCP”, Computers and Mathematics with Applications, Vol.29, No. 5, pp 97-110.
- Ozisik, M. N., and Huang, H. C., 1992, “Inverse Problem of Determining Unknown Wall Heat Flux in Laminar Flow through a Parallel Plate Duct”, Numer. Heat Transfer Part A, vol.21, pp 55-70.
- Ozisik, M. N., and Liu, F., B., 1996, “Inverse Analysis of transient turbulent forced convection inside parallel-plate ducts”, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.39, No. 12, pp 2615-2618.

INVERSE FREE-CONVECTION HEAT TRANSFER ON A VERTICAL FLAT PLATE

Abstract

An Inverse Convection Problem is considered from a vertical flat plate with a uniform heat flux at the surface. The considered two dimension flow is described by the Boundary layer equations and is obtained through the von Kármán Pohlhausen method. An algorithm of sequential function specification is adapted for the system of equations that governs the flow and heat transfer in the flat plate. The results of experiments confirm the applicability of algorithm for these problems.

Key words: Inverse Problems – Convection heat transfer – Sequential function specification